Ruch ładunku elektrycznego
w jednorodnym polu magnetycznym.
Eksperyment dla wyznaczania pędu cząstki

Czytelnik mojego poprzedniego artykułu o nietłumionym i tłumionym oscylatorze harmonicznym, któremu podobała się technologia wykorzystywania liczb zespolonych do wyznaczenia rzeczywistych rozwiązań na równania ruchu, z pewnością nie będzie rozczarowany poniższą treścią. Wartość i prostota, jaką gwarantuje algebra liczb zespolonych, uwidoczni się przy rozważaniu efektów indukcji magnetycznej w całej swej elegancji.

1. Zagadnienie ruchu ładunku w polu magnetycznym

Weźmy stałe i jednorodne, skierowane pionowo do góry pole magnetyczne $\vec{B} = B\,\hat{z}$. Siła pola magnetycznego, zwana siłą Lorentza, oddziałuje na ładunki elektryczne poruszające się w innym kierunku niż linie indukcji, zgodnie z formułą

$$\vec{F}_L = q\,\vec{v}\times\vec{B} = q\,\vec{v}\times B\,\hat{z} \quad .$$

Iloczyn ten jest równy wyznacznikowi

$$\vec{F}_L = q\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = q\,v_y B\,\hat{x} - q\,v_x B\,\hat{y} + 0 = q\,B\begin{bmatrix} v_y \\ -v_x \\ 0 \end{bmatrix} \; .$$

Prędkości zaś to nic innego, jak pochodne położeń po czasie. Nasze dynamiczne równanie ruchu, w obecności jedynie pola magnetycznego, ma postać

$$m\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = q\,B\begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix} \; ,$$

Co jest równoważne układowi równań:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{qB}{m}\,\dot{y} \\ \ddot{y} = -\dfrac{qB}{m}\,\dot{x} \end{cases} \quad .$$

Układ ten ma uwikłaną współzależność dwóch funkcji czasu. Ale staje się on niezmiernie prosty, jeśli drugie z równań pomnożymy przez *i*, a następnie dodamy je do siebie stronami:

$$\ddot{x} + i\,\ddot{y} \;=\; \frac{qB}{m}\left(\dot{y} - i\,\dot{x}\right) \;=\; -i\,\frac{qB}{m}\left(\dot{x} + i\,\dot{y}\right) \quad .$$

Wprowadzając $\xi \;:=\; \dot{x} + i\,\dot{y}$, mamy

$$\dot{\xi} \;=\; -i\,\frac{qB}{m}\,\xi \quad .$$

Rozwiązanie jest natychmiastowe, lecz pamiętajmy o tym, że stała całkowania jest również zespolona (zapiszemy ją w postaci biegunowej):

$$\xi\left(t\right) \;=\; C\;\mathrm{e}^{-i\,\omega\,t} \;=\; v_0\;\mathrm{e}^{i\varphi}\mathrm{e}^{-i\,\omega\,t} \;=\; v_0\;\mathrm{e}^{\,i\left(-\omega\,t+\varphi\right)} \quad ,$$

gdzie wyróżniliśmy częstość kołową $\omega := \frac{qB}{m}$ rozwiązania, zaś moduł stałej całkowania nazwaliśmy (nie bez powodu) v_0 . Jest to bowiem obserwowana amplituda prędkości, zarówno po *x*, jak i po *y* – a zatem jednocześnie prędkość początkowa cząstki w polu. Kinematyczne równania ruchu (położenia w funkcji czasu) wynikają z całki obliczonego wyrażenia,

$$x + iy \;=\; \int\xi\left(t\right)\,dt \;=\; v_0\mathrm{e}^{i\varphi}\,\frac{1}{-\,i\,\omega}\;\mathrm{e}^{-i\,\omega\,t} \;=\; i\;v_0\,\frac{m}{qB}\;\mathrm{e}^{\,i\left(-\frac{qB}{m}\,t\,+\,\varphi\right)} \quad .$$

Mamy bowiem, odpowiednio, $x \;\equiv\; \Re\left(x + iy\right);\quad y \;\equiv\; \Im\left(x + iy\right)$. Jednostka urojona *i* przed całym wyrażeniem po prawej stronie zamieni nam części: rzeczywistą i urojoną wyrażenia bez *i* miejscami i dopisze znak „minus” przed jego urojoną, $i\,\left(a + ib\right) \;=\; -b \;+\; ia$, tak, że w efekcie

$$\begin{aligned} x\left(t\right) \;&=\; -v_0\,\frac{m}{qB}\,\sin\left(-\frac{qB}{m}\,t\,+\,\varphi\right) \;=\; v_0\,\frac{m}{qB}\,\sin\left(\frac{qB}{m}\,t\,-\,\varphi\right) \\ y\left(t\right) \;&=\; \quad v_0\,\frac{m}{qB}\,\cos\left(-\frac{qB}{m}\,t\,+\,\varphi\right) \;=\; v_0\,\frac{m}{qB}\,\cos\left(\frac{qB}{m}\,t\,-\,\varphi\right) \quad , \end{aligned}$$

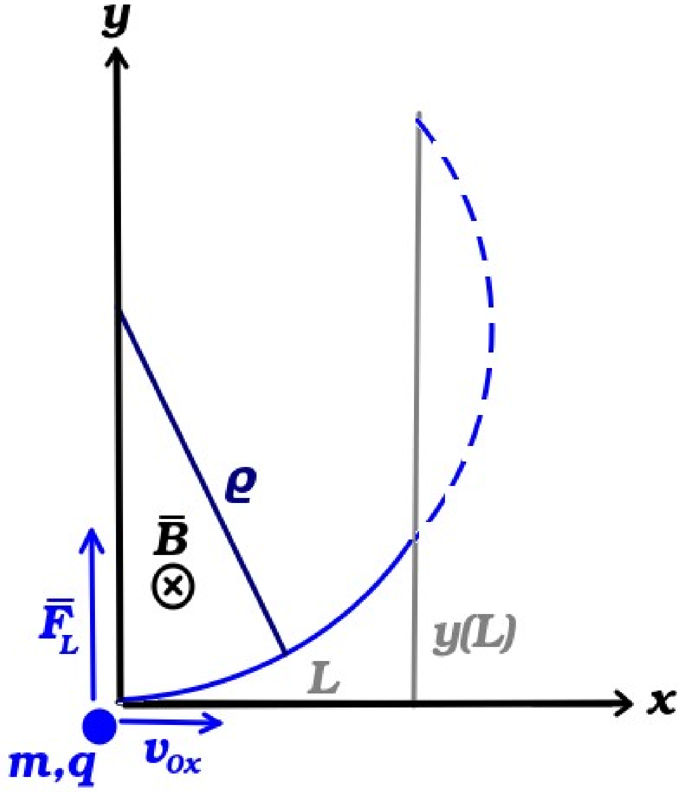
bo sinus jest funkcją nieparzystą, a cosinus parzystą. Skoro obie stałe (rzeczywiste), stanowiące amplitudy oscylatorów po *x* i po *y*, a zarazem półosie toru ładunku, są identyczne, to otrzymujemy nieuchronnie ruch po okręgu o promieniu $\rho = v_0 \frac{m}{qB}$ i z początkową fazą φ . Ruch odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do linii sił indukcji magnetycznej. Gdyby prędkość początkowa wychodziła poza płaszczyznę *XOY*, tzn. miała niezerową składową *z*-ową, to w miejsce ruchu po okręgu mielibyśmy ruch po niedomykającej się nigdy linii śrubowej o stałym skoku $\frac{2\pi}{\omega} v_{0z}$.

Innymi słowy, siła Lorentza stanowi źródło przyspieszenia dośrodkowego (ang. *centripetal*) ciała o masie *m* i ładunku *q*:

$$\vec{F}_L = m\vec{a}_{cp}$$
$$q\, v_\perp B = m\frac{v_\perp^2}{\rho}$$
$$\Rightarrow \rho = \frac{mv_\perp}{qB} .$$

Jest to ta sama zależność, którą otrzymaliśmy powyżej przy (jednakowych) amplitudach. Odnajdujemy w niej bezpośredni związek promienia krzywizny z pędem cząstki *mv*. Tylko, że sam promień krzywizny toru cząstki jest bardzo trudny do precyzyjnego zmierzenia. Prowadzi nas to do następującego zagadnienia:

2. Wyznaczanie pędu (a zatem identyfikacja) cząstki w eksperymencie



Rozważmy następujący układ (ilustracja ma przesadzone proporcje dla czytelności):

ładunek *q* o masie *m* rozpoczyna swą drogę w jednorodnym polu magnetycznym *B*, skierowanym w głąb rysunku. Pole to utrzymujemy od $x = 0$ aż do $x = L$, za którą to granicą umieszczamy ekran – macierz detektorów w celu wykrycia, w jakim położeniu *y(L)* cząstka padnie na nasz ekran. Wielkość ta będzie dla nas miarą niewidocznego (i/lub niemierzalnego) dla nas inaczej promienia krzywizny ϱ cząstki.

Długość *L* jest bardzo niewielka, dlatego tak naprawdę ekran z detektorami umieścimy w pewnej odległości *d* od granicy pola magnetycznego *L* (cf. grafika na kolejnej stronie), po opuszczeniu którego cząstka będzie poruszać się dalej po prostej – tworzącej przeciwprostokątną trójkąta podobnego do tego, zbudowanego na środku układu współrzędnych O i odcinkach *L* i *y(L)*. Jest to dobre przybliżenie, bo kąt lotu cząstki jest względnie niewielki i kierunek toru można zrównać z kierunkiem jego siecznej od O (zarówno wartość pochodnej z równania okręgu, jak i tangensa kąta, są praktycznie równe samemu kątowi dla *x* w przedziale od 0 aż do około 0.4 długości promienia krzywizny). Cząstki także polecą w pewnym stożku, w snopie, który nie jest nieskończenie wąski (tarcie, rozpraszanie). Pomiar zawsze jest obarczony pewnym błędem, o czym należy pamiętać.

Jeśli ładunek jest dodatni, a układ współrzędnych przyjęliśmy taki, żeby cała prędkość początkowa cząstki była w kierunku *x*, to wówczas siła Lorentza działa do góry, i tor cząstki jest wycinkiem okręgu o pewnym (nieznanym nam) promieniu ϱ i środku w punkcie (0; ϱ). Równanie tego okręgu to oczywiście

$$(y-\rho)^2 + x^2 = \rho^2 \quad .$$

Pytamy o miejsce detekcji cząstki, czyli *y(L):*

$$(y(L)-\rho)^2 = \rho^2 - L^2$$
$$y(L) = \rho \pm \sqrt{\rho^2 - L^2} \quad .$$

Interesuje nas mniejsza z dwóch wartości (ta z minusem), bo ona odpowiada dolnemu miejscu spotkania łuku okręgu z prostą *x* = *L*, a ta z plusem – górnemu. Mamy więc

$$y(L) = \rho - \sqrt{\rho^2 - L^2} = \rho - \rho\sqrt{1-\left(\frac{L}{\rho}\right)^2} = \rho\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{L}{\rho}\right)^2}\right) \quad .$$

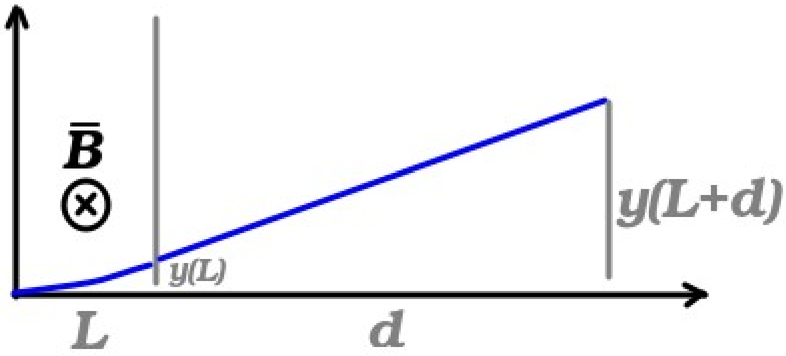
Wyrażenie pierwiastkowe rozwiniemy w szereg wokół 0 (*L* jest istotnie mniejsze od ϱ) i zachowamy liczące się wyrazy.

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \cdots$$

Przy niewielkim *x* jest sens zachować jedynie dwa pierwsze wyrazy szeregu potęgowego. W konsekwencji,

$$y(L) \approx \rho\,(1 - 1 + \frac{L^2}{2\rho^2}) = \frac{L^2}{2\rho} \ .$$

Ale przy małym *L* precyzyjny pomiar miejsca detekcji (tangensa kąta detekcji *y(L) / L*) byłby obarczony wielkim błędem; dlatego w rzeczywistości ustawiamy detektory w odległości *L* + *d* od zera.



Dla lepszego obrazu, oddaliliśmy detektor na dodatkową, znaczną odległość *d*:

$$y(L+d) = y(L)\,\frac{L+d}{L} \approx \frac{L^2}{2\rho}\,\frac{L+d}{L} = \frac{L(L+d)}{2\rho} \ .$$

Przyszedł czas na wyeliminowanie wielkości *ϱ*, dzięki formule $\rho = \frac{m v_{0x}}{qB}$, zastępując je we wzorze powyżej, skąd otrzymujemy ostatecznie

$$y(L+d) \approx \frac{L(L+d)qB}{2 m v_{0x}} \ .$$

Prawie wszystkie wielkości występujące we wzorze są albo stałymi (*q* jest siłą rzeczy równe *e*, lub rzadziej jego wielokrotności), albo wielkościami, które sami zadaliśmy i kontrolujemy (*L*, *d*, *B*). Tymczasem *y(L+d)* zostało właśnie zmierzone w wyniku eksperymentu, dzięki czemu możemy wyznaczyć z powyższego wzoru jedyną nieznaną nam a priori wielkość, to jest pęd cząstki *mv*, a zatem tym samym dokonać jej identyfikacji (jako produktu pewnej określonej reakcji).

Autor: Marek Pietrachowicz